Rayleigh - Theorem

- $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$
- ONS: $\{\varphi_i\}$ $\qquad \Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$

$$\lambda_k \leq \frac{(\Delta f, f)}{\|f\|^2} \qquad \text{für alle} \quad f \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$$

Gleichheit für $f = \varphi_k$

d.h. $\lambda_k = \inf \left\{ \frac{(\Delta f, f)}{\|f\|^2} \;\middle|\; f \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1} \right\}$

z.B.: $\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{(\Delta f, f)}{\|f\|^2} \;\middle|\; \int f \, dM = 0 \right\}$

Bemerkung: $(\Delta f, f) = \|df\|^2$

zum Beweis: $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i \quad , \quad \alpha_i = (f, \varphi_i)_{L^2}$

$f \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$

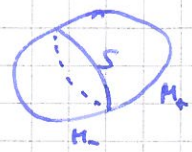
$$\rightarrow (\Delta f, f) = \left(\sum_i \alpha_i \lambda_i \varphi_i, \sum_j \alpha_j \varphi_j \right)$$
$$= \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 \lambda_i$$
$$\geq \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i^2 = \lambda_k \|f\|^2$$

Die Cheeger – Ungleichung

Sei (M^n, g) eine kompakte, zus., Riemannsche Mfk., o.

Definition: Die Cheeger – Konstante ist definiert durch

$$h := \inf \frac{vol(S)}{\min\{V(M_+), V(M_-)\}}$$



(Isoperimetrische Konstante)

wobei das Infimum über alle Untermfk. S der Kodimension 1 läuft, die M in zwei Teile M_+ und M_- mit gemeinsamen Rand S teilen.

($V \hat{=}$ Volumen)

Isometrie-Invariante

M_1, M_2 Untermft. mit Rand offen

Satz (Cheeger-Ungleichung, 1970)

Sei λ_1 der erste von Null verschiedene Eigenwert von Δ auf $C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{4}$$

Abschätzung falls Krümmung nicht überall positiv, für Flächen

Bemerkungen:
- Man kann zeigen: $h > 0$
- $sec < 0 \implies h \geq (n-1)\sqrt{-sec}$
- Die Cheeger – Ungleichung ist in gewisser Hinsicht scharf auf Flächen.

  (Buser, 1978): $\forall\, h > 0,\ \varepsilon > 0, k\ \exists\ (M^2, g)$ kompakt mit Cheeger-Konstante h und
  $$\lambda_k < \frac{h^2}{4} + \varepsilon$$

- Ungleichung von Buser (1982) und Ledoux (1994):
  $$\lambda_1 \leq C\,(\sqrt{K}\cdot h + h^2)$$
  wobei $C = C(n)$, $Ric \geq -K$, $K \geq 0$

  nochmal: $$\lambda_1 \leq 2a(n-1)\,h + 10\,h^2$$
  wobei $Ric \geq -(n-1)a^2$, $a > 0$

Isoperimetrische Ungleichungen = untere Schranke an $h(M)$

$$\frac{A^{3/2}}{V} \geq 6\sqrt{\pi}$$

<u>Beweis</u> (nach Berger, Gauduchon, Mazet)

man nutzt: $\lambda_1 = \inf\limits_{f \perp 1} \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2}$ $\quad \|df\|^2 = (\Delta f, f)$

<u>1. Schritt</u>

Sei f_1 eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1

- man ersetzt f_1 durch eine Morsefunktion f_2, d.h. f_2 hat nur nicht-entartete kritische Punkte. Man kann f_2 beliebig dicht an f_1 wählen (C^1) (Milnor)
- man ersetzt f_2 durch $f_2 + \varepsilon$, ε beliebig klein, so dass 0 ein regulärer Wert ist

  möglich da kritische Punkte von f_2 isoliert sind

$\rightarrow$ man erhält eine Funktion f ohne entartete kritische Punkte, mit 0 als regulären Wert, man kann $\|df\|^2 / \|f\|^2$ beliebig dicht an λ_1 wählen

<u>2. Schritt</u>

$S = f^{-1}(0)$ $\qquad$ 0 regulärer Wert $\rightarrow$ $S \subset M$ Untermfk der Kodimension 1

$M_+ = f^{-1}([0, f_{max}])$

$M_- = f^{-1}([f_{min}, 0])$

f_{max}, f_{min} Maximum und Minimum von f, wird angenommen, da M kompakt

oBdA: $vol(M_+) \leq vol(M_-)$ $\qquad$ dazu später mehr ? besser: "="

Im Weiteren schätzt man $\frac{\|df\|^2_{M_+}}{\|f\|^2_{M_+}}$ ab.

<u>da</u>: $f|_{\partial M_+} = 0$: $\int\limits_{M_+} \langle df, df \rangle \, v_g = \int\limits_{M_+} \langle \Delta f, f \rangle \, v_g$

v_g : Riemannsches Volumenelement

Integration über M_+ :

$$\frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\int |df|^2 v_g}{\int f^2 v_g} = \frac{\int f^2 v_g \cdot \int |df|^2 v_g}{(\int f^2 v_g)^2}$$

Cauchy-Schwarz

$$\geq \frac{(\int f \cdot |df| v_g)^2}{(\int f^2 v_g)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\int |df^2| v_g}{\int f^2 v_g}\right)^2$$

und: $|df^2| = 2f|df|$

da $f = |f|$ auf M_+
$f \geq 0$!

zz: $\frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} \geq \frac{h^2}{4}$

äquivalent : $\int_{M_+} |df^2| v_g \geq h \cdot \int_{M_+} f^2 v_g$

Beweis damit ⟶

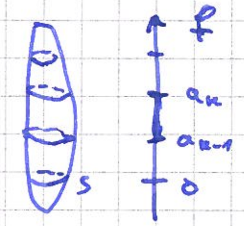
⇒ 3. Schritt

$p_1, \dots, p_r$ (isolierte) kritische Punkte von f auf M_+

$a_i := f(p_i)$

$I'_k := (a_{k-1}, a_k)$

$M_k := f^{-1}(I'_k)$ $k \geq 1$, $a_0 := 0$



Morsetheorie: $M_k \cong I'_k \times L_k$ diffeomorph

$L_k := f^{-1}(\beta)$, $\beta \in I'_k$

Variablentransformation: $I_k := (a_{k-1}^2, a_k^2)$

Diffeomorphismus $\rho : M_k \xrightarrow{\sim} I_k \times L_k$, $\alpha := \rho^{-1}$

$\pi_1 \circ \rho = f^2$ $\pi_1 : I_k \times L_k \to I_k$

dh $\pi_1 = f^2 \circ \alpha$

in M_k gilt: $v_g|_{M_k} = dr \wedge \omega$

mit $dr = \frac{df}{|df|}$, ω : Volumenform auf L_k
(Niveaufläche von f)

man beweist einen Spezialfall der Ko-Area-Formel:

$$\int_{M_+} |d f^2| \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} vol(f^{-1}(\sqrt{t})) \, dt$$

$$\int_{M_+} f^2 \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} vol\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right) dt$$

Anwendung:

$$vol\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right) \le vol\, M_+ \le vol\, M_- \le vol\left(f^{-1}([f_{min}, \sqrt{t}])\right)$$

$$vol\, f^{-1}(\sqrt{t}) \ge h \; vol\, f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])$$

$\sqrt{t}$ regulärer Wert (liegen dicht nach Sard)

nach Definition von h

$$\Rightarrow \int_{M_+} |d f^2| \, v_g \ge h \int_{M_+} f^2 \, v_g$$

<u>Lemma:</u> Sei α der Diffeomorphismus $\alpha: I_k \times L_k \to M_k$, dann gilt.

$$\alpha^* dr = \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|}$$

$\pi_1: I_k \times L_k \to I_k$

<u>Beweis:</u> $(f^2)^* dt = df^2$ $\qquad f^2: M_k \to \underset{dt}{I_k}$

$$\Rightarrow \pi_1^* dt = (f^2 \circ \alpha)^* dt = \alpha^* \circ (f^2)^* dt$$

$$= \alpha^* df^2 = 2f \; \alpha^* df$$

$$(|df^2| = 2f \; |df|)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|} = \alpha^* \left(\frac{df}{|df|}\right) = \alpha^* dr$$

$$J_k := \int_{M_k} |df^2| \; v_g \qquad \alpha: I_k \times L_k \xrightarrow{\sim} M_k$$

$$= \int_{I_k \times L_k} \alpha^* (|df^2| v_g) \qquad v_g = dr \wedge \omega \text{ auf } M_k$$

$$= \int_{I_k \times L_k} |df^2| \, (\alpha^* dr) \wedge \alpha^* \omega$$

Transformationsformel und Satz von Fubini

$$= \int_{I_k \times L_k} \pi_1^* dt \wedge \alpha^* \omega$$

$$= \int_{I_k} \left(\int_{t \times L_k} \alpha^* \omega \right) dt$$

$$= \int_{I_k} A(t) \, dt \, , \qquad A(t) := \mathrm{vol}(f^{-1}(\sqrt{t})) = \int_{\alpha(t \times L_k)} \omega$$

$$\Rightarrow \int_{M_+} |df^2| \, v_g = \sum_{k=0}^{r} J_k = \int_0^{f^2_{max}} \mathrm{vol}\left(f^{-1}(\sqrt{t})\right) dt$$

4. Schritt

siehe S. 3'

$$V(t) := \mathrm{vol}\left(f^{-1}\left([\sqrt{t}, f_{max}]\right)\right)$$

partielle Integration:

$$J_k' := \int_{I_k} V(t)\,dt = t\,V(t)\Big|_{\partial I_k} - \int_{I_k} t \cdot \frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{f_{max}^2} V(t)\,dt = \sum_{k=0}^{r} J_k' = -\sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} t\,\frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

da:
- mittleren Randterme heben sich weg
- unteres Ende: $t = 0$
- oberes Ende: $V(t) = 0$

- $$V(t) = \int_{(t,a_k)\times L_k} (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega) + \sum_{i=1}^{r-k} \int_{I_{k+i} \times L_{k+i}} (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega)$$

$t \in I_k$!

$$= \int_{(t,a_k)} \left(\int_{L_k} \alpha^* \omega\right) \frac{ds}{|df^2|} + \sum_{i=1}^{r-k} \int_{I_{k+i}} \left(\int_{L_{k+i}} \alpha^* \omega\right) \frac{ds}{|df^2|}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(t) = -\int_{L_k} \frac{\alpha^* \omega}{|df^2|}$$

$$\Rightarrow \int_{M_+} f^2\, v_g = \sum_{k=0}^{r} \int_{M_k} f^2\, v_g = \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k \times L_k} t\, v_g$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k \times L_k} t\, (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega)$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} \left(\int_{L_k} \frac{t \cdot \alpha^* \omega}{|df^2|}\right) dt \qquad \alpha^* dr = \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|}$$

$$= -\sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} t\,\frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

$$= \int_0^{f_{max}^2} V(t)\,dt$$